TD 1 : PRODUIT SCALAIRE, NORME, ORTHOGONALITÉ ET SOUS-ESPACES AFFINES

Exercice 1 . Donner les cas d'égalités dans le lemme : $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Exercice 2 .

1. Montrer que $t \mapsto \|x + ty\|^2$ est une application polynomiale de degré 2. En donner son discriminant.
2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. A l'aide de l'application polynomiale précédemment introduite, préciser à quelle condition il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3 . Soit $\{a, b, c, d\}$ un quadrilatère généralisé de $\mathbb{R}^n$. En posant $x = \vec{ab}$, $y = \vec{bc}$, $z = \vec{cd}$, montrer que la somme des carrés des côtés vaut la somme des carrés des diagonales $[a, c]$ et $[b, d]$ augmenté de 4 fois le carré de la distance entre les milieux de ces diagonales. (Euler, 1748)

Exercice 4 .

1. Soient $u = 1/\sqrt{2}(1, 1), v = 1/\sqrt{2}(1, -1)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Justifier que la famille (u, v) est orthonormale et que c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner les coordonnées de $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ dans la base orthonormale (u, v).
2. Soient $u_1 = 1/2(1, 1, 1, 1), u_2 = 1/2(1, -1, 1, -1), u_3 = 1/2(1, 1, -1, -1), u_4 = 1/2(1, -1, -1, 1)$ des éléments de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Justifier que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Donner les coordonnées de (x, y, z, t) dans la base orthonormale (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 5 . Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 3, 1, -1)$ et $F = Vect(v_1, v_2)$. Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 6 .

1. *Donner la définition d'un produit scalaire général sur un espace vectoriel réel de dimension n.*
2. *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit E l'espace des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = 0 = P(1)$. Montrer que l'expression*

$$\langle P, Q \rangle = -\int_0^1 P(x)Q''(x)dx$$

   définit un produit scalaire sur E.

Exercice 7 .

1. Justifier que l'ensemble

$$E = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) : x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

   n'est pas un espace vectoriel.
2. Montrer que E est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ et donner sa direction.

Exercice 8 . Soit $A = x + \overrightarrow{A}$ un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E = \overrightarrow{A}$ est unique. Si l'on prend $x \in E^\perp$, montrer que x est alors unique.

Exercice 9 .Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'expression

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$$

   définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Pour la norme euclidienne associée à ce produit scalaire, montrer que l'on a

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\, \|A\| \, .$$

3. Montrer que l'orthogonal de l'espaces des matrices symétriques $\mathbf{S}$ est l'espace des matrices antisymétriques.

Exercice 10 .Soit A un sous-espaces-affine de $\mathbb{R}^d$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels de somme non nulle. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) A.$$

Exercice 11 . Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par $p = (1, 0, -1)$ et orthogonal à $u = (1, 2, 3)$.

Exercice 12 . Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} F &= \left\{ M = (x, y, z) \in E,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \\ H &= \left\{ M = (x, y, z) \in E,\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \right\}. \end{aligned}$$